Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
MATEMÁTICAS I (MA-1111)
Primer Parcial (40 %)

Nombre:____

Carnet:____________________ Sección:__________

Examen TIPO: C

Justifique todas sus respuestas.

1. A resolver la inecuación, $\dfrac{x+2}{|x-1|-4} \geq 0$

   Consideramos dos casos:

   a) Si $x+2 \geq 0$ y $|x-1|-4 \geq 0$ ó

   b) Si $x+2 \leq 0$ y $|x-1|-4 \leq 0$

   Comenzando por b), $x+2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2 \Rightarrow x \in (-\infty, -2]$.

   $$\begin{aligned} |x-1|-4 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |x-1| \leq 4 \quad \Rightarrow \quad & -4 \leq x-1 \leq 4 \\ & -3 \leq x \leq 5 \quad \Rightarrow \quad x \leq (-3,5] \end{aligned}$$

   Así la solución de b) es: $x \in (-\infty, -2] \cap [-3, 5] = [-3, -2]$

   Análogamente, para el caso a) $x+2 \geq 0$ si $x \in [-2, \infty)$ y $|x-1|-4 \geq 0$ si $|x-1| \geq 4$.

   Usando lo anterior y tomando complementos, $x \in (-\infty, -3] \cup [5, \infty)$

   La solución de a) es: $x \in \{(-\infty, -5] \cup [5, \infty)\} \cap [-2, \infty) = [5, \infty)$

   Luego, la solución de la inecuación es: $x \in [-3, -2] \cup [5, \infty)$

2. Para hallar el centro de C, resolvemos el sistema:

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 4 \\ -3x+y & = & 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2x-3y & = & -4 \\ -9x+3y & = & 15 \end{array} \right. \Rightarrow -11x = 11, \ \ x = -1$$

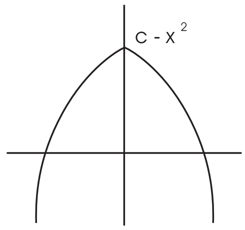
   Sustituyendo, $-2+3y = 4 \ \Rightarrow \ 3y = 6, \ \ y = 2$

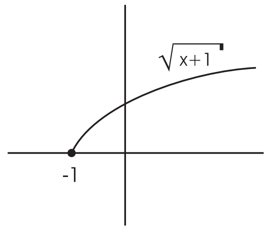
   El centro de C es $(-1, 2)$.

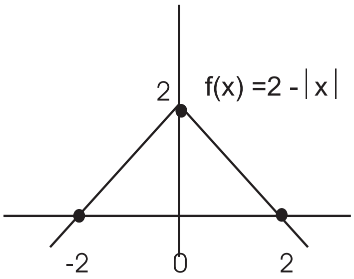
   Como el diámetro es 81 el radio es 9, y la ecuación de C es: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 81$

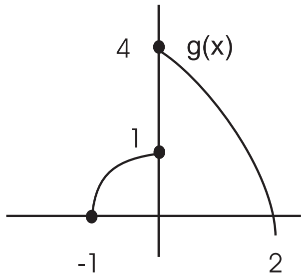
3. $f(x) = 2 - |x|$

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x > 0 \\ \sqrt{x+1} & 1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$









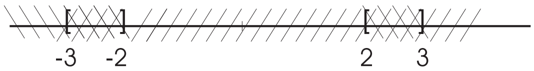
a)

b) Dominio $f = \mathbb{R}$ Dominio $g = [-1, \infty)$
Rango $f = (-\infty, 2]$ Rango $g = (-\infty, 4)$

c) $$g(f(x)) = \begin{cases} 4 - f^2(x) & \text{si} \quad f(x) > 0 \\ \sqrt{1 + f(x)} & \text{si} \quad -1 \leq f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Ahora $f(x) > 0 \;\leq\; 2 - |x| > 0 \;\Rightarrow\; 2 > |x| \;\Rightarrow\; |x| < 2$
$x \in (-2, 2)$

$$f(x) \in [-1, 0] \text{ si } \begin{array}{rcccl} -1 & \leq & 2 - |x| & \leq & 0 \\ -3 & \leq & -|x| & \leq & -2 \\ 3 & \geq & |x| & \geq & 2 \end{array}$$



$|x| \leq 3$ si $x \in (-3, 3]$
$|x| \geq 2$ si $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ al interceptar tenemos que,

$\Rightarrow f(x) \in [-1, 0]$ en el caso que $x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$

Entonces,

$$g(f(x)) = 4 - f^2(x) = 4 - (2 - |x|)^2 = 4 - 4 + 4|x| - |x|^2$$

$$g(f(x) = \sqrt{1 + f(x)} = \sqrt{1 + 2 - |x|} = \sqrt{3 - |x|}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} \sqrt{3 - |x|} & \text{si} \quad x \in [-3, -2] \cup [2, 3] \\ 4|x| - x^2 & \text{si} \quad x \in (-2, 2) \end{cases}$$

d) $$\begin{array}{rcccccc} g(f(1)) & = & g(1) & = & 4 - 1 & = & 3 \\ g(f(3)) & = & 4|3| - 9 & = & 12 - 9 & = & 3 \end{array}$$

4. Para $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

a) Veamos que f es inyectiva:

Si $f(a) = f(b) \Rightarrow \dfrac{a-1}{a+1} = \dfrac{b-1}{b+1} \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{rcl} (a-1)(b+1) & = & (b-1)(a+1) \\ ab + a - b - 1 & = & ab + b - a - 1 \\ 2a & = & 2b \\ a & = & b \end{array}$$

Luego si $f(a) = f(b)$ tenemos que $a = b$

b) $f^{-1}(y)$ es dada por:

$$y = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{si} \quad \begin{aligned} y(x+1) &= x-1 \\ yx+y-x+1 &= 0 \\ x(y-1) &= -y-1 \\ x &= -\frac{y+1}{y-1} \end{aligned} \quad \text{luego } f^{-1}(y) = -\frac{y+1}{y-1}$$

c)

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(2)) &= f^{-1}\left(\frac{2-1}{2+1}\right) &= f^{-1}\left(-1/3\right) &= \frac{-1/3+1}{-1/3-1} &= \frac{4/3}{2/3} - 2 \\ f(f^{-1}(3)) &= f\left(-\frac{3+1}{3-1}\right) &= f(-2) &= \frac{-2-1}{-2+1} &= 3 \end{aligned}$$

d) Verificamos:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{1-x}{1+x} = -\frac{x-1}{x+1} = -f(x)$$